PART4　交点の位置ベクトル(三角形の高さ)

例題

$AB=4$，$AC=5$，$\angle A=60^\circ$ の $\triangle ABC$ において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。　　(2)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

$AB=3$，$AC=2$，$\angle A=120^\circ$ の $\triangle ABC$ において，辺 BC 上に点 H を $AH\perp BC$ となるようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。　　(2) $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

第12講　PART4 確認問題

AB＝3，AC＝2，∠A＝60° の △ABC において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を H とする。
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ で表す。

1　内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}=$ [ア] である。

2　BH：HC＝s：$(1-s)$ とする。

AH⊥BC であることから s の値を求めると，$s=\dfrac{[イ]}{[ウ]}$

である。

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{[エ]}{[オ]}\vec{b}+\frac{[カ]}{[キ]}\vec{c}$$

である。

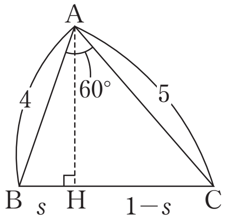
PART4　交点の位置ベクトル(三角形の高さ)

例題

AB＝4，AC＝5，∠A＝60° の △ABC において，頂点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC の交点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。　　(2)　$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。



(1)　$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=5$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ=4\times5\times\frac{1}{2}=10$$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10$

(2)　BH：HC＝s：$(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{AH}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

$$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$10(1-s)-16(1-s)+25s-10s=0$$

よって　$s=\dfrac{2}{7}$

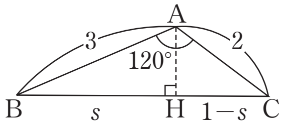
したがって　$\overrightarrow{AH}=\dfrac{5}{7}\vec{b}+\dfrac{2}{7}\vec{c}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC}$

練習

$AB=3$，$AC=2$，$\angle A=120^\circ$ の $\triangle ABC$ において，辺 BC 上に点 H を $AH\perp BC$ となるようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。　(2) $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。



(1) $|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2$ より

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 120^\circ=3\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$

(2) $BH:HC=s:(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{AH}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$$

$$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$$

$$-3(1-s)-9(1-s)+4s+3s=0$$

よって　$s=\dfrac{12}{19}$

したがって　$\overrightarrow{AH}=\dfrac{7}{19}\vec{b}+\dfrac{12}{19}\vec{c}=\dfrac{7}{19}\overrightarrow{AB}+\dfrac{12}{19}\overrightarrow{AC}$

第12講 PART4 確認問題 解答

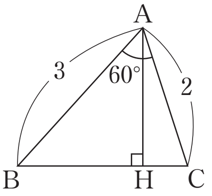
1

[正解] ア：3

[解説]

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60°$ [A]

$=3\times2\times\dfrac{1}{2}=\mathbf{3}$



[A]　2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2

[正解] イ：6，ウ：7，エ：1，オ：7，カ：6，
キ：7

[解説]

$\mathrm{BH}:\mathrm{HC}=s:(1-s)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ [B]

[B]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

また，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ である。

よって

$\{(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

$(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-(1-s)|\vec{b}|^2+s|\vec{c}|^2-s\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$3(1-s)-9(1-s)+4s-3s=0$

よって　$\boldsymbol{s=\dfrac{6}{7}}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{7}\vec{b}+\dfrac{6}{7}\vec{c}}$